

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЛГПУ»)

Институт физико-математического образования, информационных и
обслуживающих технологий
Кафедра фундаментальной математики

УТВЕРЖДАЮ

Врио директора Института физико-
математического образования,
информационных и обслуживающих
технологий

Е.А. Журавлева
«17» _____ 2025 г.

Приложение к рабочей программе учебной дисциплины
ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации
обучающихся по дисциплине
Вариационное исчисление

По направлению подготовки	01.03.01 Математика
Профиль подготовки	Математические и цифровые технологии в
образовании	
Квалификация выпускника	бакалавр
Форма обучения	очная
Курс	4 курс

Разработчик
Доцент, Давыскиба О.В.
Заведующий кафедрой
фундаментальной математики
Темникова С.В.

Протокол
от «13» _____ 2025 г. № 7

Луганск 2025

1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

1.1. Область применения

Фонд оценочных средств (ФОС) – неотъемлемая часть рабочей программы дисциплины (модуля) «Вариационное исчисление» и предназначен для контроля и оценки образовательных достижений студентов, освоивших программу дисциплины (модуля).

1.2. Цели и задачи фонда оценочных средств

Цель ФОС – установить соответствие уровня подготовки обучающегося требованиям ФГОС ВО бакалавриат по направлению подготовки 01.03.01 Математика, утвержденным приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10 января 2018 г. № 8 (с изменениями и дополнениями).

1.3. Перечень компетенций, формируемых в процессе освоения основной образовательной программы

Процесс освоения дисциплины направлен на овладение следующими компетенциями:

Код по ФГОС ВО	Индикатор достижения
Профессиональные	
ПК-4 Способен разрабатывать и применять современные технологии на основе фундаментальных математических теорий, концепций и методов	ПК-4.1. Понимает значение фундаментальных математических теорий, концепций и методов для решения прикладных задач, способен использовать их при разработке современных цифровых технологий
	ПК-4.2 Способен планировать и осуществлять деятельность по разработке и применению современных цифровых технологий на основе отбора и использования перспективных направлений исследований в области фундаментальной и прикладной математики

1.4. Этапы формирования компетенций и средства оценивания уровня их сформированности

Этапы формирования компетенций	Компетенции	Контрольно-оценочные средства / способ оценивания
Тема 1. Основные понятия вариационного исчисления	ПК-4	Устный опрос. Выполнение практических заданий
Тема 2. Простейшая задача вариационного исчисления	ПК-4	Устный опрос. Выполнение практических заданий
Тема 3. Вариационные задачи с фиксированными границами	ПК-4	Устный опрос. Выполнение практических заданий
Тема 4. Вариационные задачи с подвижными границами	ПК-4	Устный опрос. Выполнение практических заданий
Тема 5. Вариационные задачи на условный экстремум	ПК-4	Устный опрос. Выполнение практических заданий

Тема 6. Задача Больца	ПК-4	Устный опрос. Выполнение практических заданий
Тема 7. Достаточные условия экстремума функционала	ПК-4	Устный опрос. Выполнение практических заданий
Тема 8. Приложения вариационных методов	ПК-4	Устный опрос. Выполнение практических заданий
Тема 9. Прямые методы вариационного исчисления	ПК-4	Устный опрос. Выполнение практических заданий
Промежуточная аттестация	ПК-4	Зачет

1.5. Описание показателей формирования компетенций

Код и наименование компетенции	Показатели достижения компетенций (знать, уметь, владеть)
ПК-4 Способен разрабатывать и применять современные технологии на основе фундаментальных математических теорий, концепций и методов	<p>Знает: канонический вид уравнений Эйлера, слабый экстремум, условие Якоби, сильный экстремум, инвариантный интеграл Гильберта, приближенные методы решения вариационных задач;</p> <p>Умеет: пользоваться перечисленными понятиями для анализа разных ситуаций, проводить доказательства (выводить формулы) в несложных ситуациях;</p> <p>Владеет навыками: материалом дисциплины на уровне, позволяющем формулировать и решать задачи, возникающие в ходе научно-исследовательской деятельности и требующие углублённых профессиональных знаний.</p>

1.6. Критерии оценивания компетенций на разных этапах их формирования

Система оценивания учебных достижений студентов очной формы обучения

Вид учебной работы	Количество баллов
7 семестр	
Выполнение письменных заданий (КСР)	20
Выполнение практических заданий	30
Зачет	50
Итого за семестр:	100

Накопительная система оценивания по 100-балльной шкале

Четырехбалльная система оценивания экзамена	100-балльная шкала	Буквенная шкала, соответствующая 100-балльной шкале	Система оценивания зачета
Отлично	90–100	А – отлично – теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество их	

		выполнения оценено числом баллов, близким к максимальному	Зачтено
Хорошо	83–89	В – очень хорошо – теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество выполнения большинства из них оценено числом баллов, близким к максимальному	
Хорошо	75–82	С – хорошо – теоретическое содержание курса освоено полностью; некоторые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы недостаточно; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество выполнения ни одного из них не оценено минимальным числом баллов, некоторые виды заданий выполнены с ошибками	
Удовлетворительно	63–74	D – удовлетворительно – теоретическое содержание дисциплины освоено частично, но пробелы не носят существенного характера; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы; большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий, содержат ошибки	
Удовлетворительно	50–62	E – посредственно – теоретическое содержание курса освоено частично; некоторые практические навыки работы не сформированы, многие предусмотренные программой обучения учебные задания не выполнены либо качество выполнения некоторых из них оценено числом баллов, близким к минимальному	
Неудовлетворительно	21–49	FX – неудовлетворительно – теоретическое содержание курса освоено частично; необходимые практические навыки работы не сформированы; большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий не выполнено либо качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимальному; при дополнительной самостоятельной работе над материалом курса возможно повышение качества выполнения учебных заданий	Не зачтено
Неудовлетворительно	0–20	F – неудовлетворительно – теоретическое содержание курса не освоено; необходимые практические навыки работы не сформированы; все выполненные учебные	

		задания содержат грубые ошибки, дополнительная самостоятельная работа над материалом курса не приведет к какому-либо значимому повышению качества выполнения учебных заданий	
--	--	--	--

2. КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА

2.1. Оценочные средства текущего контроля (типовые)

Вопросы для устного опроса:

1. Примеры задач вариационного исчисления (ВИ).
2. Определение функционала.
3. Экстремум функционала.
4. Необходимое условие экстремума функционала.
5. Простейшая задача вариационного исчисления.
6. Необходимое условие слабого экстремума в простейшей задаче вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.
7. Простейшая задача вариационного исчисления в векторном случае. Система уравнений Эйлера.
8. Задачи вариационного исчисления с подвижной границей.
9. Задача Больца. Условия трансверсальности.
10. Изопериметрическая задача. Постановка задачи. Необходимые условия слабого локального минимума.

Практические задания:

1. Найти экстремали функционала

$$a). J[y] = \int_1^e 2y - x^2 y'^2 dx \rightarrow \text{extr}, \quad y(1) = e, \quad y(e) = 0$$

$$б). J[y] = \int_a^b 4y^2 + 5y'^2 + y''^2 dx$$

$$в). J[y] = \int_0^{\pi/2} y''^2 - y^2 + x^2 dx$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 0, \quad y'(\pi/2) = -1$$

2. Вычислить функционал $J = \int_{a_2}^{a_1} F dx$ для заданных функций y_1 и y_2 .

N	F	y_1	y_2	a_1	a_2
1	$y^2 y'$	$\sin x$	$\cos 2x$	$\pi/4$	$\pi/3$

2	$y'y$	$x^2 + 1$	$x + e^x$	0	2
3	$xy + y'$	e^{4x}	$\sqrt{x^2 + 1}$	1	2
4	$y'x - y$	$\operatorname{arctg} x$	e^{2x}	1	2
5	$2xy - y'$	e^{3x}	$\sin 2x$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
6	$e^x y + y'$	$\sin x$	x^2	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
7	$y' \sin x + y^2$	$\cos x$	$\sin x$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
8	$yy' \cos x$	$\sin x$	e^x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
9	$yy' \sin x$	$\cos x$	e^{2x}	0	$\frac{\pi}{4}$
10	$e^y \cdot x + xy'$	$x + 1$	x^2	1	2

3. Написать уравнение Эйлера для функций F .

N	F	y_1	y_2	a_1	a_2
1	$y'^2 + 3y^2$	$\sqrt{x^2 + 3}$	$e^x \cdot x$	1	2
2	$2e^y x + \frac{y'}{1+x}$	x^2	x	1	2
3	$y - y'^2$	$x^2 - x$	xe^x	0	1
4	$xy' + y'^2$	e^x	$\frac{x^2}{4} + x$	0	1
5	$xe^y - ye^x$	x^2	$1 + x$	1	2
6	$y'^2 + y$	$\operatorname{arctg} x$	$\sin x$	0	1
7	$x^2 y'^2$	e^{2x}	$\frac{1}{x}$	1	2
8	$y'^2 - y \sin x$	e^x	x^2	0	$\frac{\pi}{4}$
9	$e^y \cdot x - y' \cdot x$	$4x$	x^2	1	2
10	$y'^2 + 4y$	xe^x	$x^3 - x^2$	1	2

4. Задача с подвижными границами

$$\text{a) } J y = \int_0^{x_1} y'^2 dx, \quad y(0) = 0; \quad y(x_1) = -x_1 - 1$$

$$\text{б) } J y = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx \quad y(x_0) = x_0^2, \quad y(x_1) = x_1 - 5$$

Индивидуальные домашние работы

$$1. J y = \int_0^1 y'^2 + xy \, dx, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

$$2. J y = \int_0^1 12xy + yy' + y'^2 \, dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 4.$$

$$3. J y = \int_0^1 y'^2 + yy' + 12xy \, dx, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

$$4. J y = \int_0^{\pi} 4y \cos x + y'^2 - y \, dx, \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

$$5. J y = \int_0^{\ln 2} y'^2 + 3y^2 e^{2x} dx, \quad y(0) = 0, \quad y(\ln 2) = \frac{15}{8}.$$

$$6. J y = \int_0^1 y'''^2 dx, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0,$$

$$y(1) = 1, \quad y'(1) = 4, \quad y''(1) = 12.$$

$$7. J y = \int_0^{\pi} y'''^2 - y''^2 \, dx, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0,$$

$$y(\pi) = \pi, \quad y'(\pi) = 2, \quad y''(\pi) = 0.$$

$$8. J y_1, y_2 = \int_0^{\pi/2} y_1'^2 y_2'^2 - 2y_1 y_2 \, dx, \quad y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

$$9. J y_1, y_2 = \int_0^1 \sqrt{1 + y_1'^2 + y_2'^2} \, dx,$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 2, \quad y_1(1) = 2, \quad y_2(1) = 1.$$

$$10. J y, z = \int_0^1 y'^2 + z'^2 - zy' \, dx; \quad y(0) = 2, \quad y(1) = e, \quad z(0) = 1, \quad z(1) = 0.$$

$$y = z + e^x.$$

11. Найти экстремали, с заданным уравнением связи

$$J[y_1, y_2] = \int_1^2 y_1'^2 + y_2'^2 dx;$$

$$y_1|_1 = \frac{N}{2}, y_2|_1 = \frac{N}{3}, y_1|_2 = \frac{N+1}{2}, y_2|_2 = \frac{N+1}{3},$$

$$y_1 + y_2 - Nx^2 + x + N = 0. \quad N - \text{номер по списку.}$$

12. Задачи с подвижными границами»

В каждом варианте (N) решить две задачи.

1. Дано: $J = \int_{x_0}^{x_1} F_1 dx$ и $y|_{x_0} = \varphi(x_0)$, $y|_{x_1} = \psi(x_1)$.

Найти $y(x)$ и концы отрезка x, x_1 , (если $y|_0 = 0$, тогда $x_0 = 0$).

2. Дано: $J = \int_0^1 F_2 dx$ и $y|_1 = A$. Найти $y(x)$.

N	F_1	$y _{x_0}$	$y _{x_1}$	F_2	$y _1$
1.	$\sqrt{1+2y'^2}$	$2x_0 - 1$	$4x_1^2 - 5$	$2y'^2 + 3y$	4
2.	$4y'^2$	$x_0 + 1$	$6x_1^2 - 7$	$4y'^2 + y^2$	5
3.	$-4y + 2y'^2$	$y _0 = 0$	$3x_1^2 - 8$	$9y'^2 - y^2$	1
4.	$3y'^2 + 1/3$	$y _0 = 0$	$2x_1^2 - 9$	$y'^2 + y' - 2y$	3
5.	$-6y'^2$	$8x_0^2$	$x_1 - 10$	$y'^2 + y' + 3y$	5
6.	$-7y + 3,5y'^2$	$y _0 = 0$	$3x_1^2 - 8$	$y'^2 + y^2$	1
7.	$1/5 + 5y'^2$	$y _0 = 0$	$5x_1^2 - 7$	$y'^2 + y$	0
8.	$7y'^2$	$x_0 + 7$	$2x_1^2 - 3$	$2y'^2 + 3y' - 4y$	4
9.	$\sqrt{5y'^2 + 1}$	$5x_0 - 3$	$x_1^2 - 2$	$5y'^2 + 6y' + 9y$	6
10.	$8y'^2 - 16y$	$y _0 = 0$	$7x_1^2 - 1$	$16y'^2 - 4y^2$	1

2.2. Оценочные средства для промежуточной аттестации (зачет)

1. Примеры задач вариационного исчисления (ВИ).
2. Определение функционала.
3. Экстремум функционала.
4. Необходимое условие экстремума функционала.
5. Простейшая задача вариационного исчисления.

6. Необходимое условие слабого экстремума в простейшей задаче вариационного исчисления Уравнение Эйлера.
7. Простейшая задача вариационного исчисления в векторном случае.
8. Задачи вариационного исчисления с подвижной границей.
9. Задача Больца. Условия трансверсальности.
10. Изопериметрическая задача. Постановка задачи.
11. Уравнение Эйлера.
12. Определение вариации.
13. Варианты уравнения Эйлера для функций от различных аргументов.
14. Уравнение Эйлера для случая нескольких функций.
15. Уравнение Эйлера-Пуассона.
16. Уравнение Остроградского.
17. Примеры проблем приводящих к изопериметрическим задачам.
18. Необходимые условия экстремума.
19. Примеры проблем приводящих к задачам на условный экстремум.
20. Необходимые условия экстремума.
21. Определение второй вариации.
22. Условия Лежандра.
23. Уравнение Якоби.
24. Найти экстремали функционала

$$J y = \int_1^e 2y - x^2 y'^2 dx \rightarrow extr, \quad y|_1 = e, \quad y|_e = 0$$

$$25. \text{ Найти экстремали функционала } J y = \int_a^b 4y^2 + 5y'^2 + y''^2 dx$$

$$26. \text{ Найти экстремали функционала } J y = \int_0^{\pi/2} y''^2 - y^2 + x^2 dx$$

27. Найти экстремали функционала

$$y|_0 = 1, \quad y'|_0 = 0, \quad y|_{\pi/2} = 0, \quad y'|_{\pi/2} = -1$$

28. Написать уравнение Эйлера для функций F .

F	y_1	y_2	a_1	a_2
$y'^2 + 3y^2$	$\sqrt{x^2 + 3}$	$e^x \cdot x$	1	2

29. Написать уравнение Эйлера для функций F .

F	y_1	y_2	a_1	a_2
$2e^y x + \frac{y'}{1+x}$	x^2	x	1	2

Написать уравнение Эйлера для функций F .

F	y_1	y_2	a_1	a_2
-----	-------	-------	-------	-------

$y - y'^2$	$x^2 - x$	xe^x	0	1
------------	-----------	--------	---	---

31. Написать уравнение Эйлера для функций F .

F	y_1	y_2	a_1	a_2
$xy' + y'^2$	e^x	$\frac{x^2}{4} + x$	0	1

32. Написать уравнение Эйлера для функций F .

F	y_1	y_2	a_1	a_2
$xe^y - ye^x$	x^2	$1 + x$	1	2

33. Написать уравнение Эйлера для функций F .

F	y_1	y_2	a_1	a_2
$y'^2 + y$	$\text{arctg } x$	$\sin x$	0	1

34. Написать уравнение Эйлера для функций F .

F	y_1	y_2	a_1	a_2
$x^2 y'^2$	e^{2x}	$\frac{1}{x}$	1	2

35. Написать уравнение Эйлера для функций F .

F	y_1	y_2	a_1	a_2
$y'^2 - y \sin x$	e^x	x^2	0	$\frac{\pi}{4}$

36. Написать уравнение Эйлера для функций F .

F	y_1	y_2	a_1	a_2
$e^y \cdot x - y' \cdot x$	$4x$	x^2	1	2

37. Написать уравнение Эйлера для функций F .

F	y_1	y_2	a_1	a_2
$y'^2 + 4y$	xe^x	$x^3 - x^2$	1	2

38. Необходимые условия слабого локального минимума.

39. Система уравнений Эйлера.

40. Вычислить: 1. $J y = \int_0^1 y'^2 + xy \, dx, \quad y(0) = y(1) = 0.$

41. Вычислить: $J y = \int_0^1 12xy + yy' + y'^2 \, dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 4.$

42. Вычислить: $J y = \int_0^1 y'^2 + yy' + 12xy \, dx, \quad y(0) = y(1) = 0.$

43. Вычислить: $J y = \int_0^\pi 4y \cos x + y'^2 - y \, dx, \quad y(0) = y(\pi) = 0.$

44. Вычислить: $J y = \int_0^{\ln 2} y'^2 + 3y^2 e^{2x} dx, \quad y(0) = 0, \quad y(\ln 2) = \frac{15}{8}.$

45. Вычислить: $J y = \int_0^1 y'''^2 dx, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0,$
 $y(1) = 1, \quad y'(1) = 4, \quad y''(1) = 12.$

46. Вычислить: $J y = \int_0^\pi y'''^2 - y''^2 \, dx, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0,$
 $y(\pi) = \pi, \quad y'(\pi) = 2, \quad y''(\pi) = 0.$

47. Вычислить: $J y_1, y_2 = \int_0^{\pi/2} y_1'^2 y_2'^2 - 2y_1 y_2 \, dx,$

$y_1(0) = y_2(0) = 0, y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

48. Вычислить: $J y_1, y_2 = \int_0^1 \sqrt{1 + y_1'^2 + y_2'^2} \, dx,$

$y_1(0) = 1, y_2(0) = 2, y_1(1) = 2, \quad y_2(1) = 1.$

49.

Вычислить:

$J y, z = \int_0^1 y'^2 + z'^2 - zy' \, dx; \quad y(0) = 2, y(1) = e, z(0) = 1, z(1) = 0.$

50. Постановка вариационных задач с фиксированными границами.

51. Необходимое условие экстремума функционалов, зависящих от нескольких функций и производных высших порядков.

52. Уравнение Эйлера-Пуассона.

53. Уравнение Остроградского в задаче поиска экстремалей функционалов от функций многих переменных.

54. Постановка вариационных задач на условный экстремум.

55. Постановка задачи Больца.

56. Необходимое условие экстремума в элементарной задаче Больца.

57. Вторая вариация функционала.

58. Достаточные условия сильного и слабого экстремума в простейшей задаче вариационного исчисления.
59. Сформулируйте условие Якоби.
60. Сформулируйте условие Вейерштрасса.
61. Сформулируйте условие Лежандра.
63. Сформулируйте принцип Гамильтона.
64. Аэродинамическая задача Ньютона.
65. Вариационные принципы механики.
66. Вариационное уравнение.
67. Построение функционала по вариационному уравнению.
68. Метод Ритца.
69. Метод Бубнова-Галеркина.
70. Метод наименьших квадратов.